EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

57e jaargang
1981/1982
no. 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens - W.P. de Porto - P.E. de Roest (secretaris) - P.Th. Sanders - Mw.H.S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr.P.G.J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt *f* 45,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,–; contributie zonder Euclides *f* 25,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1¹/₂.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 40,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 23,55. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,65 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Leerdoelgericht werken in het onderwijs*

H. BOERTIEN

1 Wat is leerdoelgericht werken?

In binnen- en buitenland wordt – mede onder invloed van een aantal stromingen die verhoging van de effectiviteit en professionalisering van het onderwijs nastreven – steeds meer nadruk gelegd op een 'leerdoelgerichte werkvorm'. De 'filosofie' achter deze werkvorm is als volgt samen te vatten:

1.1 Laat in de les zo weinig mogelijk aan het toeval over; werk zoveel mogelijk doelgericht. Die doelgerichtheid dient bovendien tot uiting te komen in een zo concreet en eenduidig mogelijke omschrijving van gewenst leerlingengedrag zoals dat aan het eind van een stuk onderwijs vertoond moet kunnen worden.

1.2 Wees concreet en duidelijk in de lesopbouw; vertel de leerlingen wat van hen verwacht wordt. De concrete omschrijving van de doelstelling geeft de leerlingen daarbij het benodigde houvast.

1.3 Geef de leerlingen voldoende mogelijkheden om na te gaan welke vorderingen ze gemaakt hebben. Het tijdig bijsturen voorkomt het te lang doorgaan op een verkeerd spoor en werkt bovendien motiverend voor een volgend stuk onderwijs.

ad 1.1 Een leerling neemt immers in de les meestal slechts die zaken op die expliciet behandeld worden. Ook zal hij in het algemeen bij de verwerking van de leerstof alleen bij toeval zelf iets ontdekken wat niet in de les aan de orde is geweest. Dit betekent natuurlijk niet dat men zelfwerkzaamheid en creatief verwerken van leerstof niet zou moeten nastreven. Integendeel, maar ook zelfontdekkend bezig zijn, dient doelgericht georganiseerd te worden.

ad 1.2 Als men er zeker van wil zijn dat de leerlingen bepaalde zaken aanleren, dan moet men hen vertellen waar de les over gaat en de hoofd- en bijzaken voor hen onderscheiden. Dat vraagt van de leraar dat hij de leerstof goed gestructureerd aanbiedt.

In het verleden waren leerdoelen vaak erg globaal omschreven (ten dele

* Met dank aan drs. J. B. A. M. van Bergen en drs. C. A. M. van der Meijden voor hun kritische opmerkingen bij eerdere versies van dit artikel.

omdat ze betrekking hadden op grotere leereenheden) en waren de formuleringen zodanig dat zij de leerlingen niet veel houvast gaven omtrent datgene wat in de les behandeld zou worden.

ad 1.3 Een van de beste stimulansen om er voor te zorgen dat de leerlingen de zaken juist leren, is het regelmatig onderzoeken of de gestelde leerdoelen bereikt zijn. Het is daarbij gewenst per afgebakende eenheid van leerstof na te gaan of de leerlingen deze voldoende beheersen voordat men overgaat tot het toetsen van grotere leerstofeenheden.

2 Het project 'Leerdoelgerichte Toetsen'

Veel leraren zullen de in hoofdstuk 1 kort beschreven manier van lesgeven wel na willen streven. De vraag is echter niet wat men graag zou willen doen, maar wat men binnen de gegeven mogelijkheden in zijn lessen kan realiseren. Met name het regelmatig terugvragen van wat in de les behandeld is komt door de tijdsdruk nogal eens in de knel. Vanwege het belang van een regelmatige toetsing en vanwege het feit dat de leraar vaak geen tijd heeft om zelf kwalitatief hoogwaardige toetsen te maken, is binnen het Cito besloten om ook op dit gebied ondersteuning te verlenen.
In 1976 is het project 'Leerdoelgerichte Toetsen' met haar werkzaamheden gestart. Dit project ontwikkelt toetsseries bij leerdoelen die in de eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs nagestreefd worden. Op dit moment wordt binnen het project voor de vakken aardrijkskunde, biologie, Duits, Engels, Frans, natuurkunde, Nederlands, scheikunde en wiskunde gewerkt aan series leerdoelgerichte toetsen voor het eerste, tweede en/of derde leerjaar van het lager beroepsonderwijs, het algemeen voortgezet onderwijs en het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs.

3 Kenmerken van leerdoelgerichte toetsen

De eisen waaraan leerdoelgerichte toetsen moeten voldoen, zijn als volgt aan te duiden:
1 aansluiting aan het gegeven onderwijs
2 adequate formulering van leerdoelen
3 geschikte vraagvorm
4 valide toetssamenstelling en goede opgaven
5 gebruiksmogelijkheden.

3.1 De manieren waarop aansluiting aan het onderwijs wordt verkregen.

De leerdoelen waarbij toetsen ontwikkeld worden, moeten in het algemeen voor de leraren erg belangrijk zijn en metterdaad in het onderwijs nagestreefd worden. De toetsen moeten vraagstukken bevatten die qua opdrachten en formulering aansluiten bij de wijze waarop de lessen door de leraren

gegeven worden. Om deze aansluiting bij het gegeven onderwijs te verkrijgen worden een viertal stappen ondernomen. Deze worden hierna kort beschreven.

3.1.1 Voorafgaande aan de toetsproduktie wordt een leerboekeninventarisatie gehouden voor het leerjaar en voor het schooltype waarvoor toetsen geproduceerd zullen worden (zie Euclides jrg. 53-7, maart 1978; voor de meest recente informatie zie Citopublikatie nr. 13, december 1980, die een samenvatting bevat van een onderzoek naar het gebruik van leerboeken in het eerste en tweede leerjaar van het voortgezet onderwijs gedurende het schooljaar 1980/1981). Met behulp van deze inventarisatie is vast te stellen welke de meest frequent gebruikte leergangen zijn.

3.1.2 Door die meest frequent gebruikte leergangen goed te analyseren zijn in het onderwijs nagestreefde, min of meer gemeenschappelijke leerdoelen redelijk betrouwbaar te bepalen.

3.1.3 De toetsproduktie gebeurt door een team van ervaren leraren die lesgeven in de onderbouw van de meest voorkomende schooltypen en die werken met de meest frequent gebruikte leergangen.

3.1.4 Voor de geproduceerde toetsversies worden twee proefafnameronden op een aantal scholen georganiseerd. De eerste ronde dient om na te gaan of de toetsen als geheel bruikbaar zijn en of de opgaven geschikt zijn. Na deze ronde worden de toetsen in het algemeen behoorlijk herzien. In de tweede proefafnameronde wordt nagegaan of de aangebrachte veranderingen in de toetsen ook inderdaad verbeteringen zijn en worden de psychometrische eigenschappen van de toetsen (zoals gemiddelde toetsscore en moeilijkheidsgraad per vraagstuk) bepaald. Enquêtes die bij de twee proefafnameronden worden gehouden, geven een goede indruk hoe de hierbij betrokken docenten de gebruiksmogelijkheden van de toetsen inschatten.

3.2 *Eisen die aan de formulering van de leerdoelen gesteld worden*

De formulering van de leerdoelen moet heel concreet aangeven wat men van de leerling verlangt. Het is dus niet voldoende een leerdoel te formuleren zoals 'oplossen van tweedegraads vergelijkingen'. Bij deze formulering is het niet zonder meer duidelijk of men met 'oplossen' bedoelt 'oplossen met behulp van ontbinden in factoren', 'oplossen met behulp van kwadraatafsplitsen of de abc-formule' of 'oplossen via alle mogelijke soorten van oplossingsmethoden'. Als men niet concreet genoeg datgene definieert wat men nastreeft, kan men zich geen goed beeld vormen van de eisen die men aan de leerling stelt. Men kan in dat geval ook de te bedenken opgaven niet duidelijk genoeg afstemmen op het te toetsen leerdoel. Hierdoor wordt de bruikbaarheid van de toets geschaad.

3.3 *De keuze van de vraagvorm*

De vraagvorm dient zo gekozen te worden dat de scores op de te ontwikkelen toetsen zo zuiver mogelijk aangeven in hoeverre het bijbehorende

leerdoel beheerst wordt. Dit betekent dat zaken, die niet direct beheersing van het leerdoel betreffen, zoals het precies formuleren en noteren van gedachten, niet van invloed op de score mogen zijn. Om binnen een beperkte tijd nog een redelijk aantal vragen (i.v.m. de betrouwbaarheid van de toetsing) te laten beantwoorden, dient het opschrijven van de oplossing zo weinig mogelijk tijd te vragen.
De tweede eis die aan de toetsen gesteld wordt, is dat deze afgestemd dienen te zijn op de gewenste gebruiksmogelijkheden. Aangezien de toetsen moeten passen in een werkvorm waarbij toetsing nogal frequent optreedt, betekent dit dat de tijd die nodig is voor afname en correctie niet groot mag zijn; ook dit pleit voor een vraagvorm die hiertoe mogelijkheden biedt: de gesloten vraagvorm. Voordelen van toetsen met gesloten vragen zijn bovendien dat ze 'objectief' te corrigeren zijn en dat een foutenanalyse eenvoudiger te maken is dan bij toetsen met open vragen.
Wanneer het leerdoel het toelaat voldoet de meerkeuzevraagvorm het best aan de eisen die in het voorgaande gesteld zijn. Weliswaar is het nadeel van een meerkeuze-opgave wel dat uit de alternatieven soms extra informatie te verkrijgen is, die gebruikt kan worden bij de oplossing van de opgave of dat men kan gokken. Maar de mogelijkheid extra informatie te verkrijgen kan tot een minimum beperkt worden door goede afleiders te construeren of door de substitutiemogelijkheden uit te schakelen. Overigens is uit onderzoek gebleken dat het 'blind' gokken zeer weinig voorkomt. Ook bij de gebruikelijke open vraagvorm, waarbij de leerlingen de manier waarop ze tot het antwoord zijn gekomen, moeten opschrijven, komt het gokken (opschrijven van een vermoeden) weinig voor. Zowel bij de meerkeuzevraag als bij de open vraag is de kans klein dat het doen van een speculatie gehonoreerd wordt.

Naast de reeds genoemde voordelen van toetsen in meerkeuzevorm zijn er nog enkele redenen waarom een leraar de aanschaf van meerkeuzetoetsen zou kunnen prefereren boven die van toetsen in open vraagvorm over hetzelfde onderwerp (aannemende dat in zo'n geval beide toetsen hetzelfde pretenderen te meten).
Bij de vergelijking van de beide vraagtypen kan men het van belang vinden dat goede open vragen in het algemeen door de leraar gemakkelijker te maken zijn dan betrouwbare meerkeuzevragen. Zeer zeker van belang is het feit dat een toets uit meerkeuzevragen in het algemeen vrij eenvoudig om te zetten is in een toets met open vragen, terwijl het omgekeerde niet geldt.

Een wijdverbreid misverstand betreffende de vraagvorm is dat men met meerkeuzevragen niet op verantwoorde wijze complexe vaardigheden zou kunnen toetsen. Complexe vaardigheden zijn weliswaar moeilijker te toetsen dan enkelvoudige vaardigheden, maar dit geldt onafhankelijk van de vraagvorm. Men hoort nogal eens de opvatting dat een open vraag betrekking heeft op een complexe vraagstelling als de vraag uit verschillende onderdelen bestaat. De complexiteit van een opgave wordt echter niet bepaald door bij eenzelfde verzameling van gegevens verschillende vragen te

stellen. Men toetst op deze wijze (behalve datgene wat men per onderdeel toetst) uitsluitend of men de relevante gegevens kan onderscheiden in een verzameling van gegevens. Daarbij dient men zich af te vragen of dat altijd wel de bedoeling is, vooral ook omdat de validiteit van de toetsing per onderdeel erdoor geschaad kan worden.

3.4 *Enkele andere zaken die bij de toetssamenstelling een rol spelen.*

3.4.1 *Algemene eisen*

Een toets moet zodanig zijn samengesteld dat er sprake is van een goede dekking van de te onderscheiden vaardigheden. Van de vraagstukken waarmee getoetst wordt, mag geëist worden dat ze wiskundig correct zijn, dat ze niet triviaal zijn en dat ze te maken zijn door de leerlingen waarvoor ze bedoeld zijn. Bij meerkeuzevragen eist men verder dat de afleiders gebaseerd zijn op frequent voorkomende fouten die bij het beheersen van het leerdoel relevant zijn of dat ze geen extra informatie geven waardoor het goede alternatief gevonden kan worden op een manier die niet door de opstellers van het vraagstuk bedoeld is.

3.4.2 *Inzicht*

Bij het toetsen of leerdoelen beheerst worden, zal in het algemeen ook enig inzicht in de betreffende leerstof gevraagd worden. In de leerdoelomschrijving, die gesteld is in termen van leerlingengedrag, is het begrip inzicht echter niet te gebruiken, omdat het weinig of geen duidelijkheid verschaft omtrent het gewenste (te toetsen) gedrag van de leerlingen. Een bewering als 'de leerling heeft inzicht in...' geeft weinig houvast ten aanzien van datgene wat de leerling kan. Op zijn minst dient nauwkeurig aangegeven te worden waarin de leerling inzicht heeft en in welke mate er sprake is van inzicht. Voor het beschrijven van het bijbehorende leerlingengedrag is het bovendien nodig duidelijk te omschrijven waaruit het inzicht blijkt.

Men zegt dat leerlingen bij het uitvoeren van een opdracht inzicht in een oplossingsmethode ten toon spreiden als
a) de leerlingen de opdracht nog niet eerder onder ogen hebben gehad.
b) de leerlingen de opdracht met gebruikmaking van die oplossingsmethode kunnen uitvoeren.

Naarmate de opdracht 'verder' staat van de gebruikelijke (standaard)opdrachten waarbij een bepaalde oplossingsmethode gebruikt kan worden, wordt er verondersteld dat er meer inzicht van de leerlingen gevraagd wordt. Een nauwkeurig omschrijven van de mate van inzicht in die oplossingsmethode bestaat dus uit het aangeven van:
a) de manier waarop de oplossingsmethode bij een aantal opdrachten is onderwezen.

b)de manier waarop men bij de aan de leerlingen voor te leggen opdrachten afwijkt van de reeds aangeboden opdrachten.

Per leerdoel moet bezien worden hoeveel inzicht men bij de beheersing verlangt. Dat betekent dat vastgesteld moet worden welke afwijkingen van de 'standaardvragen' men acceptabel vindt, en welke verhouding tussen het aantal 'standaardvragen' en het aantal 'niet-standaardvragen' men wenst.

Bij het toetsen van inzicht is het goed attent te zijn op de mogelijkheid dat leerlingen van niet-standaard-vragen soms de vraagstelling niet begrijpen hoewel alle gebruikte termen op de juiste, bekende wijze gebruikt worden. Een extreem voorbeeld van een dergelijke opgave is:

f is de functie die voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ uitgezonderd $a = b = c = 0$ de veelterm $ax^2 + bx + c$ afbeeldt op het aantal elementen van $\{x | ax^2 + bx + c = 0\}$. Bereken $f(1), f(x), f(x^2 - x)$.

Na de behandeling van het begrip functie kan deze opgave – in theorie – door de leerlingen begrepen en gemaakt worden; de praktijk is anders.

3.5 *De gebruiksmogelijkheden van leerdoelgerichte toetsen.*

3.5.1 *Parallelversies*

Om de bruikbaarheid van de toetsen zowel bij meer traditionele, klassikale als bij meer geïndividualiseerde werkvormen zo groot mogelijk te maken zijn er bij elk leerdoel twee parallelversies geproduceerd. Tijdens de produktie is ernaar gestreefd per parallelversie dezelfde toetssamenstelling te verkrijgen.
Doordat er twee toetsversies zijn, kan bijvoorbeeld de ene versie gebruikt worden om na te gaan of een leerling direct na het (al dan niet zelfstandig) bestuderen van een leerstofonderdeel het bijbehorende leerdoel voldoende beheerst. De leraar bepaalt zelf welk resultaat hij voldoende vindt. Als de beheersing van het leerdoel nogal te wensen overlaat, kan de leerling herhalingsstof gaan doorwerken. Daarna kan de tweede toetsversie gebruikt worden om te zien in hoeverre de leerling door zijn extra studie de leerstof op voldoende wijze verwerkt heeft. In het geval dat de leerling bij de eerste toets van voldoende beheersing blijk geeft, kan het deze verrijkingsstof gaan bestuderen of doorgaan met het volgende leerstofonderdeel.
Nadat een aantal leerdoelen (bijvoorbeeld behorend bij één onderwerp) behandeld zijn, waarbij per leerdoel steeds één toetsversie gebruikt is, kan men de parallelversies alsnog gebruiken bij het samenstellen van een proefwerk. Daarbij kan de leraar naast eigen opgaven ook opgaven uit de parallelversies gebruiken.
In een afsluitend proefwerk zal men dikwijls willen toetsen of de

afzonderlijke leerdoelen beheerst worden, maar ook of de leerlingen de kennis van de afzonderlijke leerdoelen geïntegreerd hebben. In dat geval dient het proefwerk opgaven te bevatten waarin de beheersing van meer dan één leerdoel tegelijk (in zekere onderlinge samenhang) gevraagd wordt. Omdat de opgaven in de leerdoelgerichte toetsen in het algemeen gericht zijn op het meten van afzonderlijke leerdoelen en niet bedoeld zijn om de beheersing van geïntegreerde leerdoelen vast te stellen, is het, als men geïntegreerde kennis wil toetsen, niet aan te bevelen een proefwerk geheel te laten bestaan uit opgaven van de door het Cito gepubliceerde leerdoelgerichte toetsversies.
De parallelversies zijn ook te gebruiken als oefenmateriaal of om mee te geven als huiswerk. Een dergelijk gebruik van dit toetsmateriaal is onder andere aan te bevelen bij leerlingen die één of enkele lessen gemist hebben.

3.5.2 *Overige gebruiksmogelijkheden*

De toetsen lenen er zich in het algemeen uitstekend voor om tijdens of direct na de les na te gaan of de leerlingen de behandelde leerstof goed begrepen hebben. De leraar is daarbij zeer vrij in zijn werkwijze: hij kan enige items overslaan, hij kan de vragen stuk voor stuk bespreken, hij kan ook de antwoorden op de vragen op de gebruikelijke manier laten noteren.
In het geval van itemsgewijze toetsing zal de leraar de leerlingen eerst de gelegenheid geven om een opgave te maken. Daarna kan hij de leerlingen vragen hun vinger op te steken als ze respectievelijk A, B, C of D als antwoord hebben gekozen.
De leraar kan de leerlingen ook eerst de toetsen in hun geheel laten maken, waarbij de antwoorden genoteerd worden. Als de leerlingen de leerstof zelfstandig verwerken kunnen de leerlingen de correctie zelf uitvoeren (de goede antwoorden worden bijvoorbeeld na afloop mondeling meegedeeld of op het bord geschreven).
Bij een meer klassikaal georiënteerde verwerking van de leerstof zal de leraar zelf de correctie uitvoeren. In beide gevallen behoort de leraar aan te geven welke scores hij als voldoende, respectievelijk onvoldoende beschouwt. Door de meerkeuzevraagvorm is de correctie snel uit te voeren. Indien men (eventueel zelf ontworpen) correctiemallen gebruikt kan de correctie zeker bij grote aantallen leerlingen vergemakkelijkt worden. De leraar kan bovendien bij de gecorrigeerde toetsen van de hele klas een foutenanalyse maken. Een voorbeeld hiervan staat in de handleiding behorende bij het gepubliceerde materiaal van het project Leerdoelgerichte Toetsen.
Het gepubliceerde toetsmateriaal kan verder gebruikt worden als een (leerdoelgerichte) itembank. De toetsen worden dan beschouwd als een verzameling van opgaven waaruit geput kan worden om zelf toetsen (eventueel aangevuld met door de leraar zelf gemaakte opgaven) samen te stellen. In zo'n geval ligt de verantwoordelijkheid voor de kwaliteit van de geconstrueerde toets uiteraard bij de leraar.

4 Het toetsmateriaal

In een docentenhandleiding die behoort bij het ontwikkelde toetsmateriaal wordt informatie gegeven over het project Leerdoelgerichte Toetsen en over de gebruiksmogelijkheden van de toetsen. Van de leerdoelen, die gekozen zijn om toetsen bij te produceren, wordt in een overzicht aangegeven waar, in de meest frequent gebruikte leergangen, het afnemen van de toetsen zinvol geacht wordt. Dit sluit niet uit dat de toetsen bij andere dan de genoemde leergangen ook goed bruikbaar zijn. Om practische redenen was echter een opname van alle leergangen in het overzicht niet mogelijk.
Voor het vak wiskunde zijn reeds enige toetsseries uitgegeven en zijn uitgaves van enige andere series in voorbereiding. Elke toetsserie bestaat uit een aantal toetsen bij leerdoelen die bij één onderwerp behoren. In het schema op de volgende pagina wordt hiervan een overzicht gegeven.

Om een indruk te geven van de leerdoelen en toetsen zullen hier enige leerdoelen – aangeduid door trefwoorden – met één of twee vraagstukken uit de bijbehorende toetsen weergegeven worden.

Leerdoel: Veelterm herleiden

$3bc$ betekent

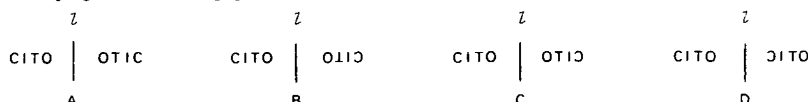
A $bc + bc + bc$
B $3 + b + c$
C $b + b + b + c$
D $3 + bc$

$2ab + ab + 2 =$

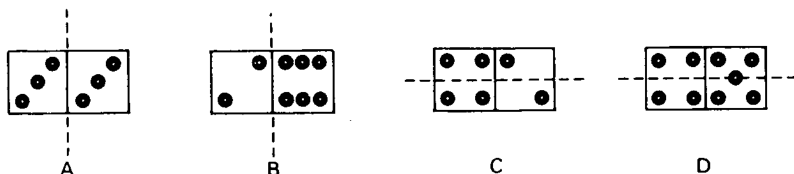
A $4ab$
B $5ab$
C $2ab + 2$
D $3ab + 2$

Leerdoel: Spiegeling in een lijn (eenvoudig); symmetrie

Het woord CITO wordt gespiegeld in de lijn l.
Het spiegelbeeld is aangegeven bij



Van welke dominosteen is de gestippelde lijn symmetrie-as?



Onderwerp van de toetsserie	De serie is reeds uitgegeven	De serie wordt uitgegeven in 1982	De serie wordt uitgegeven na 1982
1. Verzamelingen	+		
2. Gehele getallen	+		
3. Machten	+		
4. Beweringen en eenvoudige vergelijkingen/ongelijkheden in 1 veranderlijke	+		
5. Rationale getallen	+		
6. Figuren	+		
7. Afbeeldingen (meetkundig)	+		
8. Wortels		+	
9. Pythagoras		+	
10. Merkwaardige produkten en ontbinding in factoren		+	
11. Lange-termijndoelen wiskunde		+	
12. Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden in 1 veranderlijke			+
13. Functies en relaties (notaties en grafische voorstellingen)			+
14. Eerstegraads relaties en functies			+
15. Snijpunten van twee lijnen en stelsels vergelijkingen in 2 veranderlijken			+

Leerdoel: Tweedemachtswortels uit kwadraten van rationale getallen (eenvoudig)

$(\sqrt{3})^2 =$

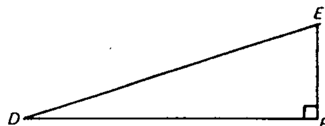
A $\sqrt{6}$
B $2\frac{1}{4}$
C 3
D 6

$\sqrt{1\frac{25}{144}} =$

A $\frac{13}{72}$
B $1\frac{1}{12}$
C $1\frac{5}{72}$
D $1\frac{5}{12}$

Leerdoel: Pythagoras (in rechthoekige driehoeken)

Welke regel is voor nevenstaande driehoek waar?
A $DF^2 = DE^2 - EF^2$
B $DF^2 = EF^2 - DE^2$
C $DE^2 = DF^2 - EF^2$
D $DE^2 = EF^2 - DF^2$



Een driehoek is rechthoekig.
De lengtes van de zijden kunnen zijn
A $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, 2
B $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, 4
C $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, 20
D $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{208}$

***Over de auteur*:**

De auteur is sinds 1977 op het Cito werkzaam als medewerker voor het vak wiskunde in het project Leerdoelgerichte Toetsen. Voordien was hij leraar wiskunde in het AVO/VWO.

Groepswerk in de wiskunde

H. RABAEY

Na een jarenlange toepassing van groepswerk in de klas is men meer en meer benieuwd naar de bereikte resultaten. Men stelt zich dan ook de vraag 'zijn de resultaten beter dan voorheen?' Gevolggevend aan de wens om te spreken en te schrijven over de eigen werkmethode, evalueerde ik ernstig de behaalde resultaten. Bij het zoeken naar teksten, die me in overeenstemming leken met de eigen beweegredenen, kwam ik terecht bij het boek van prof. C. DE KEYSER en J. EGGERMONT: 'Didactisch groepswerk in het secundair onderwijs' (Acco 1969); het deeltje algemene motivatie haalt een aantal belangrijke zaken hieruit aan.

1 Algemene motivatie

Over het algemeen wordt in het onderwijs steeds meer aandacht besteed aan de relatie tussen leraar en leerling, en terecht. Het is een positieve evolutie en als wij als wiskundeleraars door de gebruikte pedagogische methode hieraan kunnen verhelpen, hebben we zeker een positieve bijdrage geleverd in de opleiding van de ons toevertrouwde leerlingen.
Tijdens de opleiding is het noodzakelijk dat de leerlingen een goeie relatie hebben met de leraar. Even belangrijk is ook de relatie van de leerlingen onderling.
In het beroepsleven komt het werken in teamverband steeds meer centraal te staan. Overleg- en dialoogstructuren worden levensbelangrijk.
Leren samen denken, samen werken en samen leven moet tot de objectieven van de school behoren. Is het niet aan de school de jongeren te leren inspelen op de meest fundamentele maatschappijkenmerken? Op deze wijze kan dan langzamerhand van onder uit een steeds meer democratische maatschappijstructuur tot stand komen, die men echter niet zomaar als objectief van de schoolopvoeding kan stellen, wel als een ver perspectief.

A Leren samen denken

'Het persoonlijk denken van de mens kan geen op zichzelf besloten denken zijn, maar integendeel een sociale aktiviteit die zich voltrekt in en door relatie met de anderen.'

a Samen denken

'De meest vruchtbare en meest natuurlijke oefening van onze geest is het gesprek'. (M. de Montaigne)

Gesprek en communicatie
- zijn een middel tot ontwikkeling van de geest en van de oordeelsvorming.
- zijn een middel tot leren luisteren naar de anderen
- dwingen de geest tot aandacht, tot zelfverbetering
- dwingen ons tot objectiviteit in het denken.

Is het niet zo dat jongeren die verantwoordelijkheid opnemen in een vereniging, die abstracte doeleinden vooruitschuift, na een paar jaar veel beter hun motivatie en hun eigen denken kunnen verwoorden in een discussie.
Voor het verwerken van leerstof kan samendenken vruchtbaar zijn: samen spreken over de leerstof, de problemen verwoorden, het zoeken naar oplossingen, maakt de leerstof tot iets van zichzelf.

b Moeilijkheden

In de betrekkingen tussen mensen spelen allerlei krachten mee, krachten van coöperatie en oppositie, van sympathie en antipathie, van spanning en ontspanning. Deze krachten kunnen stimulerend maar ook remmend zijn.
'Het samenwerken brengt zoveel factoren in het spel dat zijn doelmatigheid onmogelijk kan worden voorzien vanuit de inachtname van de individuen alleen. Inderdaad zijn sommigen zo gehinderd door de aanwezigheid van anderen dat ze onbekwaam zijn tot het samen uitvoeren van een taak; bovendien kunnen de verhoudingen tussen de deelnemers, de hiërarchische en de affectieve, de samenwerking vergemakkelijken of hinderen.' (P. Fraisse, 1963) Wanneer niet voldoende zakelijke gerichtheid kan worden opgebracht, wanneer vooral gereageerd wordt vanuit een emotionele betrokkenheid, kan dit de productiviteit van het samendenken verminderen.

c Het samenwerken moet aangeleerd worden volgens algemeen didactische principes.
- over een beperkt thema kan door de leerlingen samen worden nagedacht en van gedachten worden gewisseld.
  (vb: oefeningen in de wiskunde)
- Hoe kunnen we nu het samendenken verbeteren?

1 Ofwel vormt de gehele klas een groep en dan neemt de leraar de leiding van het leergesprek. Dit is slechts mogelijk zo de klas maximaal 12 à 15 leerlingen telt. In dit geval is de persoonlijkheid van de leraar heel belangrijk: alle leerlingen moeten aan bod komen, het tegenover elkaar plaatsen van verschillende opinies, het goed leiden van een klasgesprek, ...
2 De klas wordt verdeeld in kleine groepen. Nadeel: controle en verbetering door de leraar wordt bemoeilijkt. De inzet van de leraar is anders, er is hier vooral inzicht en organisatie nodig.

B Leren samen werken en samen leven

1 Samenwerken is een onmisbare vorm van werken geworden. Onze huidige maatschappij zou werkelijk ondenkbaar en onleefbaar zijn zonder samenwerking en werkverdeling. Teamwork is het grote hedendaagse parool: een team van deskundigen trekt op diepzee-onderzoek, of op zuidpoolexpeditie, een team van wetenschapsmensen brengt een wetenschappelijk onderzoek tot stand, geneesheer, psycholoog, socioloog en pedagoog werken samen in een team, een team van artsen en assistenten voeren een hartoperatie uit, ... Nooit is zo

duidelijk gebleken dat mensen naar elkaar verwijzen en op elkaar zijn aangewezen. De werkende eenheid wordt minder en minder het individu, meer en meer het team. Kunnen samenwerken is een geprezen kwaliteit geworden.
2 Nochtans biedt het samenwerken moeilijkheden. In elke mens is een sterke drang naar zelfrealisatie en zelfactualisatie aanwezig. Deze drang kan in conflict komen met de drang om bij en om er voor de anderen te zijn (samenwerking wordt vaak uit nood geboren).
3 Hier ligt wellicht een taak voor de school, en het groepswerk speelt vermoedelijk ook hier een belangrijke rol. 'De verschillende studierichtingen, de schoolse taken zullen de voor de mens zo nodige kwaliteiten moeten ontwikkelen. De actieve methodes van de moderne didactiek, zoals groepswerk, beantwoorden aan deze eis'. (Ch. Brunold, 1963) In het groepswerk kunnen individueel gerichte krachten en krachten van samenwerking aan bod komen. Om bij de groepstaak tot een afdoend resultaat te komen, moeten regels worden nageleefd:
a de groepsleden moeten bereid zijn naar elkaar te luisteren, zichzelf te beheersen, er is durf nodig om het eigen standpunt te verdedigen en moed om het prijs te geven wanneer het blijkt onjuist te zijn.
b Elk groepslid moet bereid zijn zich in te zetten voor het welslagen van de gemeenschappelijke taak en zich aan te passen aan het werktempo en de werkwijze van de anderen.
c Het groepswerk doet beroep op de verantwoordelijkheidszin en de bereidheid tot onderlinge hulpvaardigheid van elk van de groepsleden.
d Het is ook een ervaringsmogelijkheid voor het efficiëntiekarakter van het samenwerken en voor de vreugde van het samenzijn en samenleven.
De regels van het samenwerken zullen ook in concrete situaties moeten ontdekt en beoefend worden, ze zullen in gevarieerde toepassingen moeten aangewend worden en veralgemeend in buitenschoolse situaties. Concreet kan dit in de didactische situatie gebeuren door het samen zoeken naar documentatie, het samen uitvoeren van een groepstaak, het samen plannen van een aktiviteit. Dit is mogelijk met de hele klas. Wanneer deze te talrijk is, zal zich gemakkelijk spontaan het verschijnsel voordoen van het ontstaan van subgroepen. Daarom kan beter van meet af aan met kleine groepen gewerkt worden. Dit moet geenszins een gevaar betekenen voor het verlies van de klaseenheid. Het leren samenwerken en het verdiepen van de kennis zijn voorname doelstellingen van het wiskundeonderwijs. In vergelijking met het frontaal onderricht en individueel werk is groepswerk meer renderend wat betreft:

1 de kwalitatieve verwerking van de leerstof
2 de ontwikkeling van het denken
3 de kritische zin
4 de spreekvaardigheid
5 de hulpvaardigheid bij de leerlingen onderling
6 de verantwoordelijkheidszin
7 de zin voor initiatief

2 Groepswerk in de wiskunde

Terecht vraag je je af: 'Hoe heb je nu deze algemene doelstellingen in de praktijk omgezet?'. Dit deeltje wil hier een antwoord op geven, een beschrijving van de door mij toegepaste vorm van groepswerk. Groepswerk in de hogere cyclus van het ASO (Algemeen vormend Secundair Onderwijs).

A Het samenstellen van de groepen
1 Betreft het een klas waar de leerlingen elkaar nog niet goed kennen (vb in het vierde jaar waar leerlingen uit meerdere onderwijsinstellingen samen komen) neem ik bij het begin van het schooljaar zelf het initiatief.
- Op basis van hun vroeger resultaat wiskunde verdeel ik de klas in werkgroepen, hierbij worden leerlingen van de verschillende scholen in een groep samengebracht.
- Na ongeveer een maand laat ik hen de kans, zo nodig, een verandering voor te stellen. Dit herhaal ik nog eens bij het begin van het tweede trimester. Meestal komt men dan reeds tot een ongeveer definitieve samenstelling.

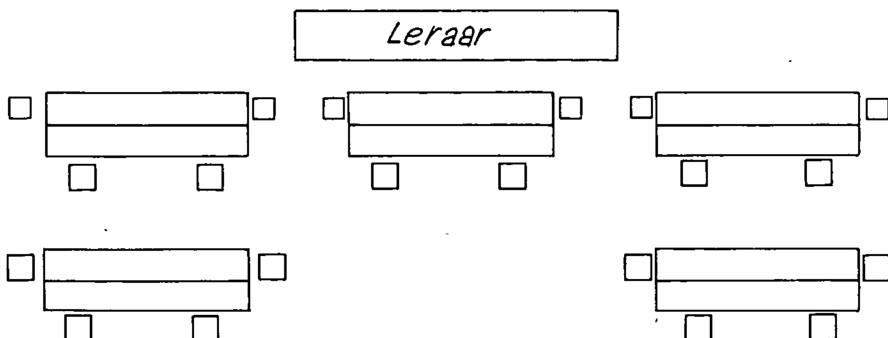
2 Betreft het een klas waar de leerlingen elkaar reeds kennen dan laat ik hen bij het begin van het schooljaar drie namen van leerlingen, waarmee ze goed zouden kunnen samenwerken, opschrijven. Vooraf gaf ik evenwel een beschrijving van het groepswerk en van de doelstellingen die ik hiermee wil bereiken
- samen nadenken
- met meer kritische zin werken (andere leden van de groep zullen om een verantwoording vragen, andere leden van de groep zullen je op aspecten wijzen waar je niet zo direct aan hebt gedacht, het goed formuleren van een vraag, . . .)
- vertrouwen in de andere leden van de groep want slechts één lid brengt de resultaten bij de leraar en brengt gebeurlijk de verbetering of aanvulling mee.

3 Grootte van de groepen
Momenteel werk ik met groepen bestaande uit vier leden. Ik stel vast dat met dergelijke grootte:
- elk lid voldoende inbreng kan hebben in het werk
- de oefeningen op een voldoende kritische wijze behandeld worden
- elk lid de gelegenheid heeft om regelmatig eens met resultaten bij de leraar te komen

Zijn er, omwille van het aantal leerlingen, groepen bestaande uit drie leden, dan stelt men vast dat precies die groepen moeite hebben om het ritme van de andere groepen te volgen.
Een collega heeft me onlangs voorgesteld te werken met groepen van vijf leerlingen; hij behaalde hiermee goede resultaten. Ik zal dit binnenkort eens testen.

4 Het plaatsen van de groepen in klas
Het klasmeubilair bestaat uit tafels en stoelen. Bij groepswerk worden twee tafels samengeschoven en de leerlingen plaatsen zich zoals op bijgevoegd schema; op deze wijze heb ik als leraar inkijk in alle groepen.

B Wat wordt in groep verwerkt, en hoe gebeurt het?
1 Het theoretisch gedeelte van de wiskunde wordt nog steeds onder mijn leiding



verwerkt, enkel de oefeningen worden in groep gemaakt.
Na de theorie noteer ik de lijst van de te maken oefeningen. Ik maak geen voorbeelden, ze krijgen het gehele oefeningenpakket in eens en met opgave van de beschikbare tijd.
Wat bereik ik hiermee:
- groepswerk op een welomschreven opdracht
- voor het oplossen van de oefeningen hebben ze de theorie als informatiebron, in de theorie moeten ze de oplossingsmethode vinden.
- ze moeten in elke groep het werk organiseren, overleg is dus noodzakelijk.

2 Het oefeningenpakket bevat drie soorten oefeningen
a Basisoefeningen (B)
Hierover vinden ze in de notities aanduidingen omtrent de oplossingsmethode, ze moeten evenwel nog verantwoorden en volledig uitwerken. Met deze oefeningen leren ze de voornaamste oplossingsmethodes aan. Enkel voor uitleg en hulp komen ze bij de leraar.
b Toetsoefeningen (T)
Met deze oefeningen moeten ze bewijzen de methodes goed aangeleerd te hebben. Al deze oefeningen worden ter verbetering aan de leraar voorgelegd.
c Supplementaire oefeningen
In deze oefeningen treffen we de moeilijkheden en de specialiteiten aan. Enkel de beste groepen maken deze oefeningen.

3 Bij het maken van de oefeningen:
a Kunnen de groepen uitleg vragen aan de leraar; ofwel komt een lid van de groep ofwel komt de gehele groep.
b Kunnen de groepen achteraan in klas de handboeken en notities van vorige jaren raadplegen.
c Vroeger was het mijn gewoonte om tijdens de oefeningen rond te lopen in klas en te antwoorden op vragen.
Nu is het mijn optie om zoveel mogelijk ter plaatse te blijven, en wel om volgende redenen:
- men kan veel beter het werk in de groepen volgen
- er is meer tijd vrij om uitleg te geven
- een individualisatie: elke leerling komt wel eens met een oefening en zo heeft men de mogelijkheid om ook een zijn werkmethode in te kijken (al werken ze

samen in groep, in het uiteindelijke resultaat is bij elk van de leden een verschil te merken)
- men bereikt hiermee dat tijdens de oefeningen een leerling wel eens uitleg komt vragen over de theorie.

d Heel belangrijk is het evenwel dat de leerlingen graag werken in een dergelijk systeem; de verhouding met hun leraar verloopt vlotter en ook onder elkaar in de groepen stellen we een aangename sfeer vast.

4 De evaluatie

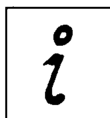
a De belangrijkste evaluatie is zeker de bespreking: een foutieve methode wordt verbeterd en de groepsvertegenwoordiger gaat de verbetering uitleggen in de eigen groep.

b Persoonlijk noteer ik enkel dat de oefening af is, er worden geen punten gegeven. Hiermee bereik ik in ieder geval dat de leerlingen gemakkelijker uitleg komen vragen, dat er niet de drempel van de punten is, en het maakt in ieder geval de relaties heel wat vlotter. Ik ga uit van het principe 'een trimester lang moeten de leerlingen de kans hebben om te leren', punten belemmeren hen hierin (ze willen steeds een goede indruk maken bij de leraar, met een foutieve oplossing komen ze niet omdat ze er punten mee verliezen)

c Op het proefwerk, als het een mondeling proefwerk is met bijgevolg de kans voor elke leraar er iets persoonlijks van te maken, heb ik een kans om naast de wiskunde ook het werk in de groepen te evalueren. Reeds gedurende twee jaar maak ik gebruik van volgend systeem:
- de klas wordt verdeeld in reeksen van 6 leerlingen
- bij lottrekking worden de zes leerlingen 2 per 2 verdeeld
- elk koppel krijgt twee gemeenschappelijke en één individuele vraag
- nadat beide leden de vraag schriftelijk hebben voorbereid zal de eerste leerling zijn oplossing uitleggen en de tweede zal hierna over de oefening en over de theorie die er mee in verband staat twee vragen stellen waarop de eerste leerling moet antwoorden.
- de gestelde vragen en de antwoorden zijn belangrijke momenten in de evaluatie.
- waarop wordt punten gegeven?
  - ° Is de oplossing juist (nazicht schriftelijke oplossing)
  - ° de gegeven uitleg door het eerste lid
  - ° de twee gestelde vragen door het tweede en de gegeven antwoorden door het eerste lid.

Over de auteur:

Herman Rabaey, Lic. in de wiskunde. Leraar wiskunde aan het O.L.V. College te Veurne, Lid stuurgroep wiskunde Eekhoutcentrum.



Leerlingen kiezen (te) graag wiskunde!

Interview over DBK in de praktijk

BART MULLER, BERT ZWANEVELD

Differentiatie binnen klasseverband: een stroming in didaktiekboeken of ook in de praktijk uitvoerbaar? Wachten we totdat alle leerboeken basisstof, toets en extrastof aanbieden en dat is dan DBK? Of is het dat niet?
Wij gingen naar de scholengemeenschap voor mavo en havo in Diever (Drenthe) om te kijken hoe daar het differentiatiemodel uitgewerkt is. In een voormalige muloschool met een viertal lokalen – de sektie wiskunde is daar gehuisvest – stonden de docenten Kees Bakker, Ysbrand Boxma en direkteur Adri Gaasbeek ons te woord.

Het systeem

De basisstof, ontleend aan het mavo-programma, is onderverdeeld in blokken en deze weer in een drie à vijftal onderdelen. Zo is in figuur 1 blok 61 verdeeld in vier taken (vier lessen).

Bewaarblad van klas...

blok 61 a.

Basisstof. Je maakt de volgende sommen uit boekje HV 2a (4 lessen)

taak		taak	
61a	les 1, som 2	61c	les 1, som 4e t/m 4i; som 5
61b	les 1, som 3, te beginnen op blz.6, bovenaan.	61d	les 1, som 6

Maak nu een lijstje van de nieuwe woorden die je geleerd hebt. Vermeld erbij op welke bladzijde van het boek ze staan.

Figuur 1

Leerlingen werken daar, afhankelijk van de docent en de door leerlingen gestelde (gemeenschappelijke) vragen, klassikaal of individueel aan. Na het doorwerken van zo'n blok volgt de diagnostische toets, die niet noodzakelijk door de hele klas gelijktijdig gemaakt wordt. In deze fase is derhalve sprake van *tempodifferentiatie*. Na deze toets treedt *leerstofdifferentiatie* op: afhankelijk van het resultaat van de toets maakt een leerling herhalingsopdrachten dan wel keuzewerk. Na een drietal lessen volgt dan de eindtoets en de klas begint vervolgens tegelijk aan het volgende blok basisstof.
Naast de gewone wiskundelessen worden er *huiswerklessen* gegeven, waarin leerlingen extra hulp krijgen voor de herkansing, die enkele weken na elke eindtoets plaats vindt. (Deze huiswerklessen kennen andere sekties op deze school ook)

De toetsing

Een leerling kiest voor een B-toets (toetst basisstof) of voor een C-toets (toetst ook de extrastof). Voor zo'n toets wordt geen cijfer gegeven; alleen een beoordeling onvoldoende of voldoende. Deze beoordeling wordt genoteerd op een *overzicht leerresultaten* (figuur 2). De dubbele indeling is bestemd om de herkansing in te vullen. Het aantal (on)voldoenden bepaalt het rapportcijfer.

Overzicht leerresultaten wiskunde   Naam: . . . .   klas: . . .
1979-1980   2e leerjaar

rapport	blok	onderdelen: B I	II	III	IV	V	C I	II	III	totalen: B o	B v	C o	C v
1	Vergelijkingen (26)				X	X		X	X				
1	Richtingen (61)					X							
	Verdelen en getallenrechte (62)												
	Functies en vergelijkingen (63)								X				

Figuur 2

Wat is jullie visie op het (wiskunde)onderwijs?

In de sektie zijn nooit grote doelen geformuleerd. Het accent ligt op het uitvoeren en telkens bijschaven van de gekozen manier van werken. Dat we door deze werkwijze de leerlingen zelfstandigheid bij het werken leren, is meegenomen.
Wel hebben we leerstofdoelen zo precies mogelijk geformuleerd. Vooral voor 3 havo blijkt dat best moeilijk.

Hoe werkt het hierboven beschreven systeem in de praktijk?

Onze leerlingen hebben geen moeite met het systeem als zodanig: 'Met de kinderen is het geen enkele probleem.' Moeilijk is wel het *lezen* van de leerdoelen. Je krijgt dan bijvoorbeeld de vraag: 'Wat moet ik voor de herkansing doen?' Het is dan nodig het programma stop te zetten en een lesuur de leerdoelen klassikaal na te lopen.
De manier van werken en omgaan met kinderen bevalt goed: leerlingen komen graag naar de les; in een lesuur kun je al veel van je taak afkrijgen, zodat je minder huiswerk hebt; de mogelijkheid van de herkansing werkt motiverend.
Een mogelijk gevolg hiervan is, dat zo'n 70 % van de leerlingen wiskunde in hun pakket kiezen (landelijk ligt dat percentage niet boven de 50). Ook leerlingen die een negatief advies voor wiskunde gekregen hebben, kiezen dan graag dit vak. Het is duidelijk, dat hun resultaten tegenvallen.
Het beoordelingssysteem werkt sterk determinerend: 'Het regent negens, maar ook drieën.' Bij de keuze havo/mavo blijkt het cijfer voor wiskunde een belangrijke rol te spelen.
Overigens zijn we met dit cijfersysteem niet zo gelukkig, want doelen als zelfstandig werken en samenwerken worden niet in het cijfer verwerkt. Het zou mooier zijn als we een *leerspoor* per leerling zouden bijhouden.

Hoe is dit systeem ontstaan?

In 1964 zijn we gestart met het mavo-experiment in het kader van de mammoetwet. Daarna zijn we in 1968 overgestapt naar de methode van A tot Z. Stap voor stap verander je zo'n methode, werk je de differentiatie verder uit, maak je aanvullingen, zodat we nu voor de helft van ons programma met het boek werken en voor de andere helft met stencils en IOWO-pakketjes. We gaan hiermee door totdat we helemaal van het boekje af zijn.
We hebben nu een cyclus van vier jaar: 1ste jaar de eerste klas voorbereiden, 2de jaar ermee werken, 3de jaar tweede klas voorbereiden, 4de jaar ermee werken, dan weer de eerste klas herzien, etc.

Hoe kijkt de direktie tegen de sektie aan?

Adri Gaasbeek vindt de sektie 'behoudend, traditioneel gevormd en bereid tot veranderen'. De wiskunde sektie vervult een voortrekkersrol op school, maar handelt niet zo snel, dat de rest van de school afhaakt. Het wederzijds vertrouwen op deze school (2 gebouwen, 35 medewerkers, 450 leerlingen) is groot.
'Het is hier opvallend dat ze niet met de pest erin naar de wiskundeles gaan!'

Met dank aan Kees, Ysbrand en Adri.

Eenheidscirkel in het complexe vlak

J. O. DE KAT

In een voorgaand artikel (Euclides, *54*, 1978/'79, No. 10) beschreef ik een methode om met behulp van enige fundamentele figuren en een gehalveerde driehoek van Pascal gehele machten van sinus en cosinus direct te kunnen opschrijven. De toepassingsmogelijkheid van Pascal hierbij ontdekte ik een tijd geleden; later kon ik dit pas bewijzen. In het bewijs komt een onjuistheid voor (bovenaan blz. 412), waarop ik werd gewezen door de heer P. J. de Doelder van de Technische Hogeschool te Eindhoven, waarvoor ik hem hierbij dank zeg. De essentie van zijn opmerking komt hierop neer, dat voor $(-\mathrm{e})^{-ikx}$ behoort te worden geschreven: $(-1)^k \mathrm{e}^{-ikx}$, waaruit volgt: $-\mathrm{e}^{-ikx}$ voor k = oneven en $+\mathrm{e}^{-ikx}$ voor k = even. De opmerking heeft mij aan het denken gezet en van deze gelegenheid zou ik gebruik willen maken om de aandacht te vestigen op enige meetkundige voorstellingen in het complexe vlak, waaruit onmiddellijk zijn af te lezen de bekende formules:

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2};$$

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \qquad (1)$$

welke formules ik gebruikte voor het bewijs van de rekenregel. Zij volgen uit de formule van Euler:

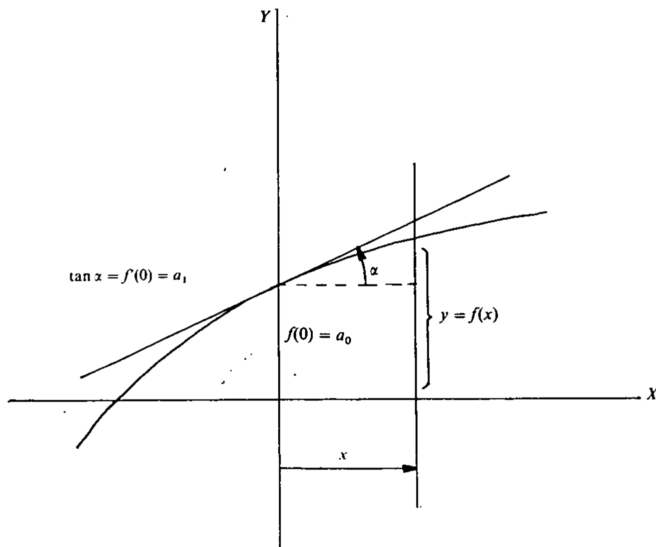
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \qquad (2)$$

Afleiding hiervan kan geschieden door toepassing van de reeks van Mc Laurin op de drie termen.
Reeks van Mc Laurin:

Uit fig. 1 kan een eerste aanzet worden afgelezen van een machtreeksontwikkeling van de functie $y = f(x)$ in de omgeving van de Y-as. Wij zien direct:

$$y = f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x = a_0 + a_1 x = a_0 x^0 + a_1 x^1 \qquad (3)$$

Het ligt voor de hand om een betere benadering te zoeken door voortzetting van de reeks:



Figuur 1

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

De coëfficienten zijn te vinden door herhaald differentiëren:

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x) &= f^{(0)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots\\
y^{(1)}(x) &= f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots\\
y^{(2)}(x) &= f^{(2)}(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + \dots\\
y^{(3)}(x) &= f^{(3)}(x) = 2.3a_3 + 2.3.4a_4x + \dots\\
y^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x) = 2.3.4a_4 + \dots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Stellen wij in de reeks en zijn afgeleiden $x = 0$, dan volgt:

$$a_0 = f^{(0)}(0);\ a_1 = f^{(1)}(0);\ a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!};\ a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!};\ \dots$$

Algemeen: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (5)

Wij kunnen dan voor de reeks van Mc Laurin schrijven, uiteraard onder voorwaarde, dat alle bewerkingen geoorloofd zijn:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{6}$$

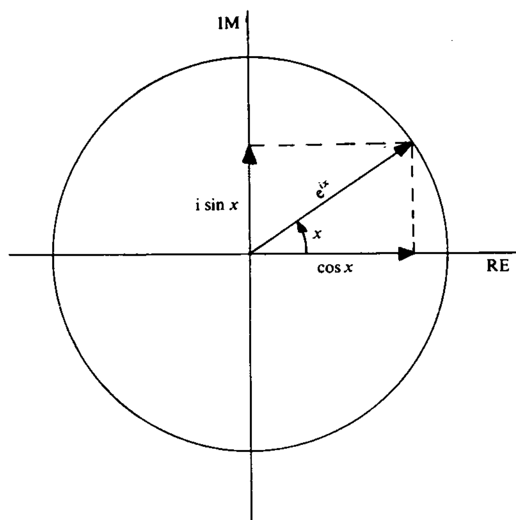
Pas dit toe op de drie termen van de formule van Euler:
$y = \cos x$; $y = \mathrm{i} \sin x$; $y = e^{\mathrm{i}x}$; met $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$:

$$y = \cos x = 1 \quad - \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^4}{4!} \quad - \dots \qquad (7)$$

$$y = \mathrm{i} \sin x = \quad \mathrm{i}\frac{x}{1!} \quad - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} \quad + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} \quad - \dots \qquad (8)$$

$$y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \mathrm{i}\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (9)$$

Wij zien, dat het tweede lid van de laatste uitdrukking de som is van de beide voorgaande, waarmee de formule van Euler is afgeleid. Deze formule laat zich meetkundig weergeven door de *eenheidscirkel in het complexe vlak:*



Figuur 2

Uit deze figuur is de formule van Euler onmiddellijk af te lezen, waarbij wij moeten bedenken, dat optelling van complexe getallen een *vectoriële* optelling is. Omdat voor iedere reële waarde van x geldt:

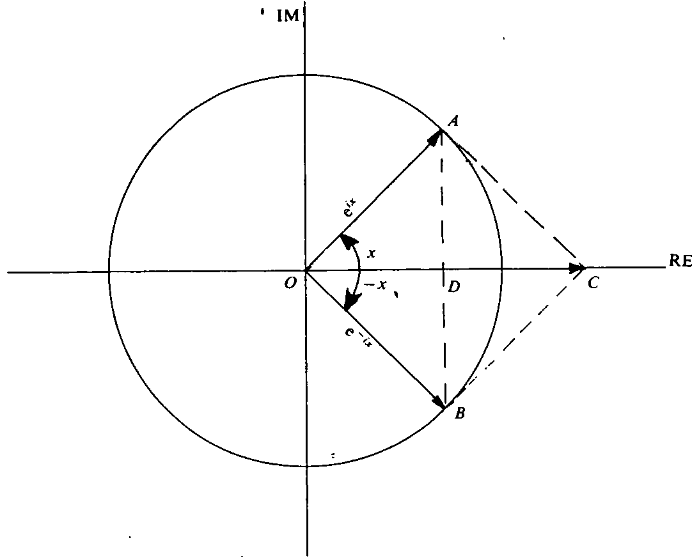
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (10)$$

hetgeen direct volgt uit de definities van sinus en cosinus in de eenheidscirkel in het Cartesiaanse vlak, kunnen wij uit de figuur bovendien aflezen, dat voor iedere reële waarde van x eveneens geldt:

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1 \qquad (11)$$

Wij kunnen nu ook uit de eenheidscirkel in het complexe vlak direct de complexe formules (1) voor $\cos x$ en $\sin x$ aflezen (zie fig. 3).
Vectoriële optelling van $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ en $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ doet de ruit $OACB$ ontstaan, waarvan de horizontale diagonaal $OC = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ wordt gehalveerd in D door de verticale

diagonaal AB. Van OC is de linkerhelft $OD = \cos x$ (zie fig. 2) zodat $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, waarmee formule (1) voor $\cos x$ is gedemonstreerd.

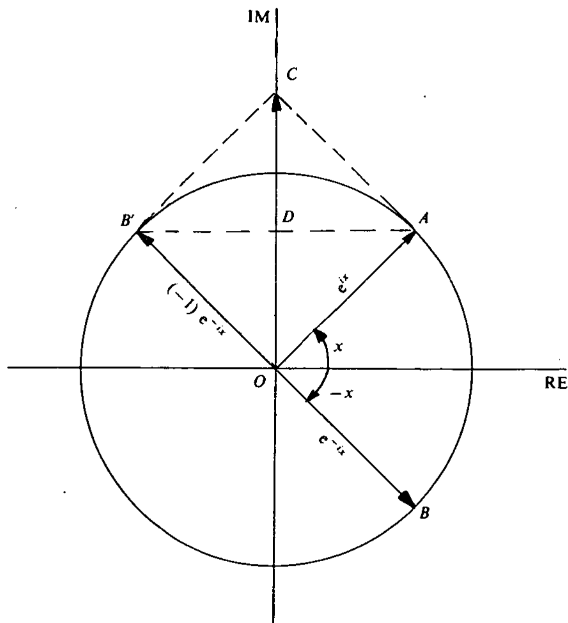


Figuur 3

Wij vermenigvuldigen het complexe getal e^{-ix} uit fig. 3 met (-1), waarmee wij het punt B' in fig. 4 vinden. Vectoriële optelling van e^{ix} en $(-1)e^{-ix}$ geeft de ruit $OACB'$, waarvan de verticale diagonaal $OC = e^{ix} + (-1)e^{-ix}$ wordt gehalveerd door de horizontale diagonaal AB'. Van OC is de onderste helft $OD = i\sin x$ (zie fig. 2), zodat:

$$2i\sin x = e^{ix} + (-1)e^{-ix},$$

waarmee formule (1) voor $\sin x$ is gedemonstreerd.



Figuur 4

Epiloog.

Het kan zijn, dat de figuren 2 t.e.m. 4 in een of ander boek te vinden zijn, maar ik zag ze nog nergens. Bij het onderwijs worden de formules (1) en (2) steeds door reeks-ontwikkeling afgeleid in de geest, zoals ik hierboven voor de formule van Euler demonstreerde. De formules (1) worden ook wel direct als definities ingevoerd. Het gevolg was, dat ik ze nooit lang kon onthouden en altijd weer moest opzoeken, als ik ze nodig had. Geeft men echter leerlingen de figuren 2 t.e.m. 4 mee, dan kunnen zij, ook nadat ze het hele betoog vergeten hebben, de formules (1) en (2) toch direct goed opschrijven, door zich de figuren weer voor de geest te halen. Evenals in mijn vorige artikel meen ik hier wederom te hebben gedemonstreerd, dat het rigoreus toepassen van fundamentele figuren de belasting van het geheugen kan verminderen, wat weer leidt tot betere studieresultaten.

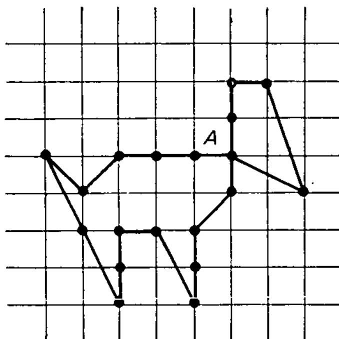
Over de auteur:

Ir. J. O. de Kat begon in 1946 zijn loopbaan als electrotechnisch ing. met het ontwerp en de constructie van een electronische analoge rekenmachine voor Rijks Waterstaat. Hierna zette hij zijn werk voort aan de Technische Hogeschool te Delft (analoge rekenmachines, electrotechnische meettechniek) en studeerde af als wiskundig ingenieur bij het Delftse cyclotron. Thans ontwerpt hij computer-programma's voor het berekenen van electrische en magnetische velden.

De stelling van Georg Alexandrof Pick

H. ZUNNEBERG

Een veelhoek, waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn, met p roosterpunten op de omtrek, en q roosterpunten binnenin, heeft een oppervlakte die gelijk is aan $(\frac{1}{2}p + q - 1)$ hokjes. De veelhoek mag zichzelf niet snijden, d.w.z.: bij een rondgang om de veelhoek langs de omtrek moet elk van de p roosterpunten precies één keer worden aangedaan. (Dus een situatie zoals in A fig. 1 kan zich niet voordoen).



Figuur 1

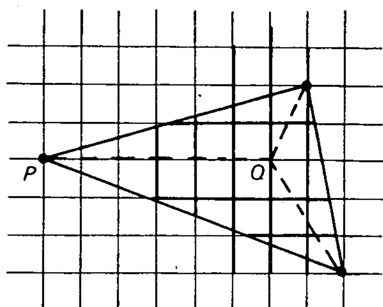
Opp kop = $\frac{1}{2} \cdot 5 + 2 - 1 = 3\frac{1}{2}$ hokje
Opp lijf = $\frac{1}{2} \cdot 15 + 3 - 1 = 9\frac{1}{2}$ hokje
De kop is een O.V.
Het lijf niet.

Bewijs:

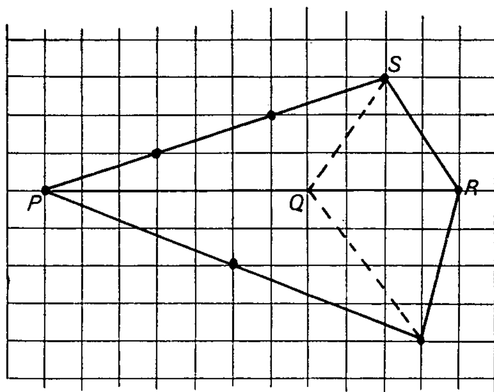
Het zal handig blijken te zijn om het begrip 'overzichtelijke veelhoek' in te voeren (fig. 1).
Definitie: Een overzichtelijke veelhoek (O.V.) is een veelhoek die minstens één roosterpunt bevat van waaruit hij overzichtelijk is, d.w.z. van waaruit elk punt van de veelhoek kan worden verbonden d.m.v. een lijnstuk dat geheel tot de veelhoek behoort. Eerst zullen we de stelling bewijzen voor een willekeurige O.V. die overzichtelijk is vanuit P.

A
Stel P is een inwendig roosterpunt. Verbind P nu met de p roosterpunten die op de omtrek liggen, en er ontstaan p driehoeken met P als gemeenschappelijk hoekpunt. Neem nu één van de $(q - 1)$ overgebleven inwendige roosterpunten b.v. Q.
Er kunnen zich twee situaties voordoen:

1e Q ligt binnen zo'n driehoek.
Verbind dan Q met de hoekpunten (fig. 2).
2e Q ligt op de gemeenschappelijke zijde van twee driehoeken.
Verbind Q nu met de twee overliggende hoekpunten (fig. 3).

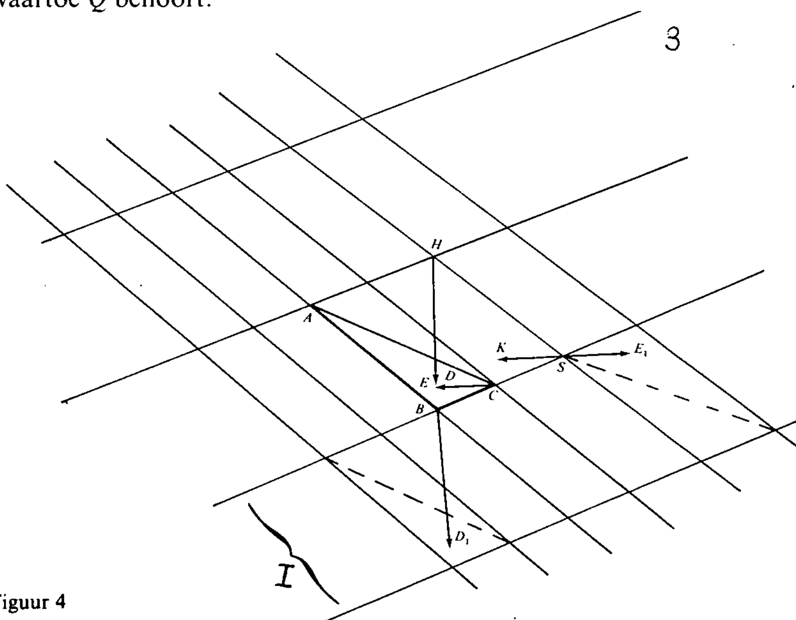


Figuur 2



Figuur 3 $\triangle QRS$ is verdeeld in 'atomaire' driehoeken

Zowel in geval 1 als in geval 2 neemt zodoende het aantal driehoeken toe met 2. Door steeds een nieuw roosterpunt Q te kiezen kan men doorgaan tot elk van de $(q - 1)$ inwendige roosterpunten tot hoekpunt van een driehoek is geworden. Er zijn dan $2(q - 1)$ driehoeken bij gekomen en het totaal is geworden: $p + 2(q - 1)$. Deze driehoeken hebben uitsluitend roosterpunten in de hoekpunten en we zullen deze driehoeken 'atomaire' driehoeken noemen. Elk lijnstuk dat in geval 1 of in geval 2 getrokken wordt, behoort geheel tot een driehoek waartoe Q behoort.

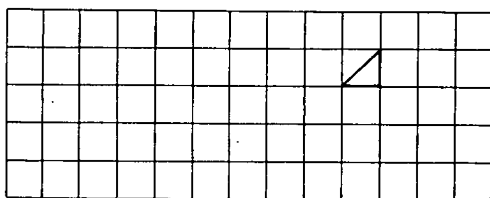


Figuur 4

Daarom hebben twee 'atomaire' driehoeken geen enkel punt, of één roosterpunt, of een lijnstuk begrensd door twee roosterpunten gemeenschappelijk.

B

Ligt P op de omtrek, dan kan men $(p - 2)$ driehoeken vanuit P maken, en de q inwendige roosterpunten zorgen voor een toename van $2q$ driehoeken zodat het totaal ook $p - 2 + 2q = p + 2(q - 1)$ wordt.
Het blijkt nu dat de $p + 2(q - 1)$ 'atomaire' driehoeken dezelfde oppervlakte hebben. Veronderstel nl. dat $\triangle ABC$ 'atomair' is en uit zijn veelhoek is gehaald. Veronderstel verder dat *niet* alle 'atomaire' driehoeken dezelfde oppervlakte hebben, en veronderstel tenslotte dat $\triangle ABC$ met b.v. BC vastzit aan een 'atomaire' driehoek met kleinere oppervlakte, b.v. $\triangle BCD_1$. De hoekpunten van de congruente parallelogrammen om $\triangle ABC$ zijn roosterpunten (zie fig. 4). D_1 is ook een roosterpunt, maar zal binnen strook I moeten liggen, want oppervlakte driehoek is halve hoogte × basis. Pijl BD_1 is gelijk aan pijl HD (dezelfde lengte en dezelfde richting), dus D_1 is een roosterpunt want B, D en H zijn het ook. ABC is echter 'atomair'. Dit geeft dus een tegenspraak. Evenzo geldt dit voor E dat ontstaat uit E_1 d.m.v. de pijlen SE_1, SK en CE.
Conclusie: alle 'atomaire' driehoeken hebben dezelfde oppervlakte.



Figuur 5

Figuur 5 leert ons dat deze oppervlakte $\frac{1}{2}$ is.

Conclusie: De oppervlakte van een O.V. is:

$$\tfrac{1}{2}[p + 2(q - 1)] = \tfrac{1}{2}p + q - 1$$

(Een wiskunde II-leerling zal begrijpen dat b.v. driehoek OAB met $O = (0,0)$, $A = (7, 10)$ en $B = (16, 23)$ 'atomair' moet zijn nadat hij de determinant $\begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 10 & 23 \end{vmatrix}$ heeft uitgerekend, want een driehoek met determinantwaarde 1 kan je niet verder splitsen).
Veronderstel nu dat V een veelhoek is, maar geen O.V. Dan is het mogelijk om V te verknippen in een aantal aan elkaar grenzende O.V.'s door te knippen langs lijnstukken die aan de uiteinden roosterpunten van de omtrek van V hebben. Bij het knippen veranderen inwendige roosterpunten van V in roosterpunten op de omtrek van twee aangrenzende O.V.'s. We veronderstellen eerst dat één maal knippen voldoende is (fig. 6) en dat a het aantal roosterpunten is tussen A en B. Stel dat behalve de roosterpunten van AB, er nog p_1 op de omtrek van V_1 en nog p_2 op de omtrek van V_2 liggen; en dat q_1 en q_2 de inwendige roosterpunten van V_1 resp. V_2 zijn. (fig. 6) Dan geldt: $p_1 + p_2 = p + 2a + 2$ en $q_1 + q_2 = q - a$.
Oppervlakte V = oppervlakte V_1 + oppervlakte V_2 =

Figuur 6

$\frac{1}{2}[p_1 + 2(q_1 - 1)] + \frac{1}{2}[p_2(q_2 -)] =$
$\frac{1}{2}[p_1 + p_2 + 2(q_1 + q_2 - 2)] = \frac{1}{2}[p + 2a + 2 + 2(q - a - 2)] =$
$\frac{1}{2}p + q - 1.$
Bestaat een veelhoek V uit een aantal aaneengesloten O.V.'s nl. V_1, V_2, V_3, ... V_n dan bewijst men op bovenstaande wijze dat de formule geldt voor

V_1, V_2 en V_3 samen
V_1, V_2, V_3 en V_4 samen

en tenslotte voor V_1, V_2, V_3, V_4, ... en V_n samen,

dus voor V.

De stelling van Pick boeit me door zijn elementaire karakter. Het bewijs ervan is echter vrij moeizaam tot stand gekomen. Misschien kan het geheel anders, b.v. met behulp van de getaltheorie.
Wilt u het ook eens proberen? Ik ben erg benieuwd naar andere bewijzen van deze stelling.

Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het HAVO-onderwijs II

(een aanvullende reactie op het gelijknamige artikel I van R. Leentfaar in Euclides no. 4, 56e jaargang)

A. VAN OORT

Leentfaar maakt bij het opstellen van een raaklijn aan een tweedegraadskromme onderscheid in:
I punten op de cirkel
II punten buiten de cirkel
III punten op de parabool (a: staand - b: liggend)
IV punten 'buiten' de parabool
Hij zegt dat zijn enige reden tot het schrijven van zijn artikel zijn voorkeur voor de door hem methode 4 genoemde oplossingsmethode bij IIIb is.
Hoewel mijn belangrijkste reden tot deze reactie het feit is dat hij onder II slechts één methode vermeldt, acht ik het gepast om eerst op zijn zienswijze betreffende IIIb te reageren.

Bij IIIb geeft Leentfaar 4 methoden:
1 eerlijk delen oftewel halve substitutie.
2 met behulp van een lijn met willekeurige richtingscoëfficiënt (of richtingsvector) en het stellen van $D = 0$ na substitutie.
3 opsplitsen in twee functies (kiezen!), gevolgd door differentiëren (kettingregel)
4 na spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$ de raaklijn uitrekenen en vervolgens terugspiegelen (de grote voorkeur van Leentfaar)

Mijn leerlingen gebruiken al jaren alle vier deze methoden, waarbij ik hen, hoewel ik de voorkeur van Leentfaar deel (ik zie in methode 1 t/m 4 een oplopende waarderingsgraad, en vertel dat ook aan mijn leerlingen) volledig vrij laat in de keuze.

Bij inventarisatie van de examens en schoolonderzoeken van de afgelopen 4 jaren bleek dat mijn leerlingen als volgt hun voorkeur lieten blijken:
36% van de oplossingen was volgens methode 1
29% van de oplossingen was volgens methode 2
22% van de oplossingen was volgens methode 3
13% van de oplossingen was volgens methode 4

De leerlingen hadden een uitgesproken voorliefde voor de werkwijzen die gebaseerd waren op trucmatig rekenen (methode 1) of riskant rekenwerk (methode 2).

In klassegesprekken met 2 havo-examengroepen bleek dat vele leerlingen op het examen- of schoolonderzoekmoment niet eens meer op het idee kwamen om methode 3 of 4 te gebruiken, wat uiteraard vooral te wijten is aan het feit dat ze al in de vierde klas een keuze gemaakt hebben vo6r methode 1 ('veilig: je kunt nauwelijks iets fout doen') of 2 ('vertrouwd: net als op de mavo').

Na afloop van deze gesprekken vroeg ik hen een voorkeur uit te spreken en dat gaf het volgende beeld:
20 % koos methode 1
20 % koos methode 2
32 % koos methode 3
28 % koos methode 4
Uit deze keuze bleek dat mijn leerlingen gevoelig waren voor criteria als 'je moet begrijpen wat je doet'. Maar .....

Kort daarna kwam het probleem voor in een schoolonderzoek. Wat was het resultaat?
28 % gebruikte methode 1
32 % gebruikte methode 2
18 % gebruikte methode 3
22 % gebruikte methode 4

Conclusie: toch weer een terugval naar het veilige ('foutloze') en vertrouwde ('mavo').
Ik vraag me af of dit verschijnsel (het willen teruggrijpen naar mavo = onderbouwstof) aan de school waar ik lesgeef (een havo-top met uitsluitend ex-mavo-leerlingen) meer voorkomt dan aan categoriale havo's of havo's binnen een scholengemeenschap.
Als ik in mijn eigen ervaring aan een scholengemeenschap havo-vwo grasduin, dan geloof ik deze vraag bevestigend te moeten beantwoorden. (eerlijkheidshalve: ik besteed binnen de havo-top onwillekeurig minder aandacht aan transformatieformules dan destijds aan de havo-afdeling binnen de gemeenschap, dat was blijkbaar toch iets van de vwo-sfeer in de scholencombinatie; maar het verklaart wellicht de aarzeling van mijn huidige leerlingen om methode 4 te gebruiken, waarin een spiegeling voorkomt, hoe eenvoudig ook).

Ad II:
Raaklijnen vanuit een punt buiten de cirkel.

Hier geeft Leentfaar als enige methode het opstellen van een lijn met willekeurige richtingscoëfficiënt (let op de vertikale lijn) of richtingsvector door het gegeven punt met vervolgens, na substitutie, D = 0 stellen.

Een voor leerlingen zeer begrijpelijke methode die in mijn klassen door een meerderheid met veel succes gebruikt wordt, gaat als volgt:

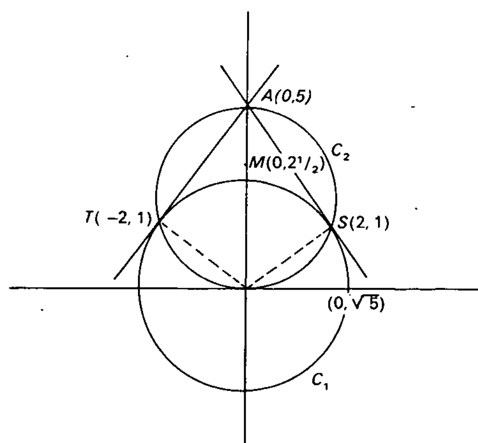
Bepaal de vergelijking van een hulpcirkel C_2 met als middelpunt het midden tussen het gegeven punt en het middelpunt van de gegeven cirkel C_1 en als straal de afstand van het gegeven punt tot het middelpunt van C_2. De snijpunten van C_1 en C_2 zijn de raakpunten. De lijnen die deze raakpunten verbinden met het gegeven punt zijn de raaklijnen.
Hoe eenvoudig deze werkwijze is, kunt u zien aan het volgende voorbeeld, ontleend aan Moderne Wiskunde deel 7H paragraaf 5.7. Daar wordt het als voorbeeld 1 opgelost met behulp van de willekeurige-richtingscoëfficiënt-methode.

Opgave
Bepaal de vergelijking van de raaklijn vanuit $A(0,5)$ aan de cirkel C_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$.
oplossing:
Het middelpunt van C_1 is $(0,0)$
Het middelpunt van C_2 is $(0, 2\frac{1}{2})$
(namelijk het midden tussen (0, 0) en (0, 5))
De straal van C_2 is $2\frac{1}{2}$
(namelijk de afstand van (0, 0) tot $(0, 2\frac{1}{2})$)
Dan is de vergelijking van C_2:
$x^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = (2\frac{1}{2})^2$
We berekenen de snijpunten van C_1 en C_2 door oplossen van het stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = (2\frac{1}{2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

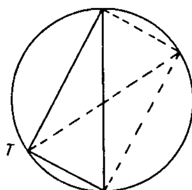
De snijpunten zijn: $S(2, 1)$ en $T(-2, 1)$.
Raaklijnen zijn:
$AS: y = -2x + 5$ en $AT: y = 2x + 5$



Toelichting, eerst het schetsje:

We maken hierbij gebruik van 2 eigenschappen:
a Iedere raaklijn staat loodrecht op de bijbehorende middellijn.
b De hoek tussen de twee koorden vanuit een willekeurig punt op de cirkel naar de twee eindpunten van een middellijn is recht.

Deze laatste stelling is voor de leerlingen gemakkelijk aannemelijk te maken door de driehoek uit te breiden tot een vierhoek met even lange diagonalen die elkaar bovendien middendoor delen, dus een rechthoek:



Conclusie:
Deze methode bestaat uit 3 onderdelen:
1 het opstellen van de vergelijking van een cirkel met gegeven middelpunt en straal.
2 het snijden van 2 cirkels.
3 het opstellen van 2 lijnen door telkens twee punten.

Deze opdrachten worden door leerlingen zelden fout uitgevoerd en aan het criterium van Leentfaar, ('de leerling moet weten wat hij doet'), wordt zeker zo sterk voldaan als bij het werken met D = 0.

Overigens, aan dit laatste criterium voldoet zeker niet de derde methode die, ik zou bijna zeggen helaas, door een paar leerlingen al spelend met formules werd gevonden:
halve substitutie geeft de poollijn, het snijden hiervan met de cirkel geeft de raakpunten.
Zij hebben de eigenschappen van de poollijn bewezen, maar het lijkt me niet herhaalbaar. De 'ontdekkers' van de poollijn volharden in het gebruik van deze methode, temeer daar zij bemerkten dat zij, in tegenstelling tot de werkwijze met de hulpcirkel, ook bij parabolen bruikbaar is.

***Over de auteur*:**

Geboren 1949. Door zelfstudie m.o.B wiskunde gehaald (wegens gebrek aan waardering voor de opleidingen). Een jaar ervaring opgedaan aan het Theresialyceum te Tilburg. Zeven jaren werkzaamheid op het van der Puttlyceum in Eindhoven (met een groeiende voorliefde voor de havo). En nu al weer vier prettige jaren aan de havo-top van de Katholieke Pedagogische Akademie in 's-Hertogenbosch.

Korrel

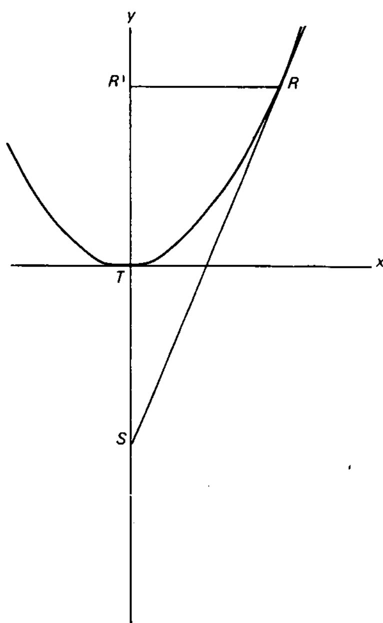
Raaklijn aan parabool in gegeven punt op de parabool (havo)

De leerlingen hebben geleerd:

Alle parabolen zijn gelijkvormig. (I)

Bij gelijkvormige transformaties zijn verhoudingen invariant. (II)

Ze kennen (enkele) eigenschappen van parabolen, o.a. de 'subtangens'. Deze laatste wordt natuurlijk bewezen en wel als volgt: (zie figuur 1)

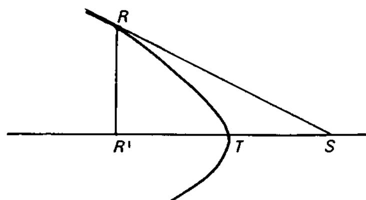


Figuur 1

Ga uit van $f(x) = x^2$.
$R(a, a^2)$ ligt op de parabool $f'(x) = 2x$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in R aan de parabool is $2a$. Raaklijn $l: y - a^2 = 2a(x - a)$. Deze snijdt de hoofdas in $S(0, -a^2)$. De projectie R' van R op de hoofdas heeft coördinaten $(0, a^2)$. De top $T(0, 0)$ van de parabool is het midden van lijnstuk $R'S$.
Volgens (I) en (II) geldt derhalve, dat voor elke parabool T het midden is van lijnstuk $R'S$.

Hiermee gewapend gaan de leerlingen bijvoorbeeld dit vraagstuk te lijf:

Bepaal een vergelijking van de raaklijn in $R(-2, 1)$ aan parabool p: $(y + 3)^2 = -4(x - 2)$.
Karakteristieken als top, as, parameter zijn direct afleesbaar. Men maakt een ruwe schets van de situatie (figuur 2).



Figuur 2

Eveneens zijn afleesbaar: $R'(-2, -3)$, $T(2, -3)$ en $S(6, -3)$. Van de raaklijn zijn nu twee punten bekend: R en S. Richtingscoëfficiënt is dus $\frac{1+3}{-2-6} = -\frac{1}{2}$. Dus $l: y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$.

Elke andere methode, mij tot dusverre bekend, is tijdrovend en vráágt om verschrijvingen en rekenfouten. Deze methode is snel en eenvoudig. Bovendien is het kennen van een extra eigenschap (de subtangens) nooit weg.

L. A. Rang

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

453. Elke week gaan vier leden van een wandelclub samen wandelen. Om kliekjesvorming tegen te gaan wordt afgesproken dat geen enkele keer twee leden samen wandelen die te voren ook reeds een keer samen gewandeld hebben. Men kan dit 20 weken volhouden, maar niet meer. Hoeveel leden telt de club minstens?

454. Elk convex veelvak bezit ten minste twee zijvlakken die door gelijke aantallen ribben begrensd worden. Bewijs dat. (Westduitse wiskunde-olympiade 1975: ingezonden door R. Troelstra)

455. Start met een geordend paar positieve gehele getallen (a, b). De volgende drie operaties mogen uitgevoerd worden:
f: $(p, q) \to (p + 1, q + 1)$
g: $(p, q) \to (\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$ indien p en q beide even zijn
h: (p, q) en $(q, r) \to (p, r)$
Het geordende paar (c, d) heet bereikbaar vanuit (a, b), als door achtereenvolgend uitvoeren van operaties f, g en h het paar (c, d) verkregen kan worden. De operatie h wordt daarbij uitgevoerd op een tweetal reeds verkregen geordende paren.
a Welke geordende paren zijn bereikbaar vanuit (10, 15)?
b Hoe kan men algemeen de verzameling karakteriseren van de geordende paren die vanuit (a, b) bereikbaar zijn?
c Is de relatie 'is bereikbaar vanuit' reflexief, symmetrisch, transitief?
d Uitgaande van welke tweetallen geordende paren is elk geordend paar bereikbaar?
(naar een opgave ingezonden door R. Troelstra)

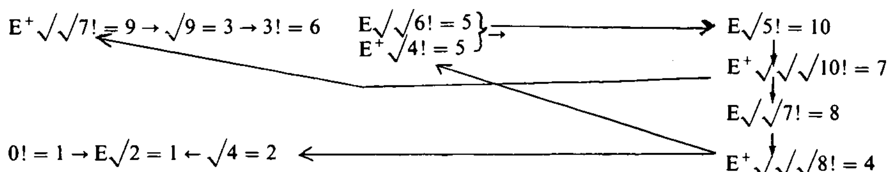
Oplossingen

445. Gevraagd werd uitgaande van 1, 9, 8, 2 in deze volgorde met behulp van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken, nemen van het entier

de getallen van 1 tot en met 100 te vormen.
De methode moet tot en met 1999 werken.
We verzamelen eerst wat materiaal.
E = afronden op een geheel getal naar beneden.
$E^+ = -E- =$ afronden op een geheel getal naar boven.

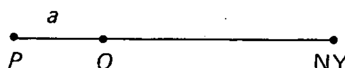
$E\sqrt{4!} = 4$ $\qquad E\sqrt{7!} = 70$
$E\sqrt{5!} = 10$ $\qquad E\sqrt{\sqrt{8!}} = 14$
$E\sqrt{6!} = 26$ $\qquad E\sqrt{\sqrt{10!}} = 43$

Nu kunnen we op de volgende manier getallen uit elkaar vormen.



Onderstel, we zijn erin geslaagd uitgaande van 1982 de getallen 1 tot en met 100 te vormen. Dan lukt het met bijv. 1754 ook. Want uitgaande van 7 kunnen we, door de pijlen te volgen 9 maken, uitgaande van 5 maken we 8 en uitgaande van 4 maken we 2. Kunnen we uitgaande van 1982 een getal vormen, dan kunnen we dat getal uitgaande van 1754 zo ook vormen.
De getallen die we uitgaande van 1982 kunnen vormen, kunnen we dus ook vormen uitgaande van $1abc$, waarin $a \neq 0$, $b \neq 0$ en $c \geq 2$.
Dat zijn nog niet alle jaartallen van 1982 tot en met 1999. Er ontbreken 1990 en 1991. Om deze ook mogelijk te maken, moeten we uitgaan van 1981. Als we er aan denken, dat we uitgaande van 9 en van 8 alle getallen 1 tot en met 11 kunnen vormen en bovendien $4! = 24$, dan zal men zonder moeite de getallen van 1 tot en met 100 kunnen vormen uit 1981 en daarmee uit 1982-1999.
Liefhebbers kunnen nu naar hartelust verder zich problemen stellen.

446. Onderstel de som van de afstanden is minimaal als het toernooi in P gehouden wordt en $P \neq$ NY. Onderstel verder dat in New York p schaakmeesters wonen en daarbuiten q; $p > q$. Vervang P door Q. Dan worden p afstanden a kleiner en worden de overige afstanden elk hoogstens a groter. Dus wordt de som kleiner. Het toernooi dient dus in New York gehouden te worden.



447. Men verkrijgt de partities door n getallen 1 op een rij te plaatsen en daartussen 0 of 1 of ... of $n-1$ scheidingen aan te brengen.
Dit kan op

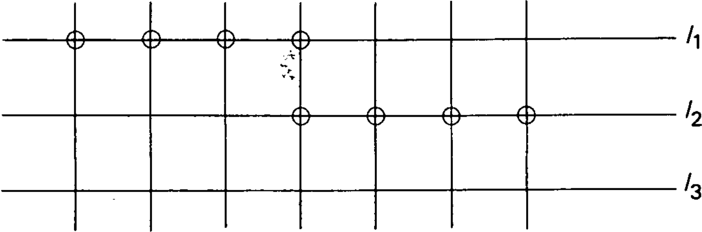
$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1} \text{ manieren.}$$

448. Onderstel er zijn reeds een aantal koorden getekend. Een nieuwe koorde wordt toegevoegd. Deze snijdt de reeds aanwezige in k punten. Het aantal delen wordt dan met $k + 1$ vermeerderd. Het totaal aantal vlakdelen is dus
1 + het aantal koorden + het aantal snijpunten van de koorden.
Het aantal koorden is $\binom{n}{2}$. Het aantal snijpunten is gelijk aan het aantal viertallen punten op de cirkel, want elk viertal punten levert zes koorden die samen 1 snijpunt hebben. Het aantal snijpunten is dus $\binom{n}{4}$. Zodat we voor het aantal vlakdelen vinden $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

449. De boten ontmoeten elkaar als een van hen 700 voet afgelegd heeft en dan weer als deze boot de breedte van de rivier + 400 voet afgelegd heeft. Samen hebben ze dan 1 resp. 3 keer de breedte van de

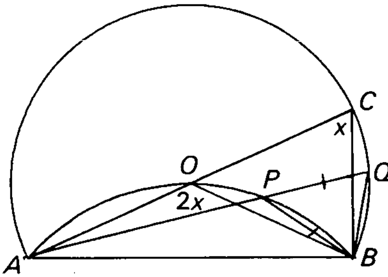
rivier afgelegd. Dus is de breedte + 400 voet = 3.700 voet. De breedte is 1700 voet.

450. Van elke zeven punten hebben er minstens vier dezelfde kleur. Onderstel in onderstaande figuur hebben vier punten van l_1 de kleur rood en vier punten van l_2 eveneens. Het kan zijn dat slechts één van de rode punten op l_1 op eenzelfde verticale lijn ligt als een rood punt op l_2. In dat geval schakelen we l_3 in. Zijn hier vier van de zeven punten rood, dan kunnen we een rechthoek vormen met vier rode hoekpunten en anders één met vier blauwe.



(Men kan op deze manier ook een eenvoudige en elegante oplossing vinden van recreatie nr. 389; E. C. Buissant des Amorie maakte mij hierop reeds opmerkzaam.)

451. Onderstaande figuur spreekt voor zich. Het middelpunt van de grote cirkel is het midden O van de gegeven boog AB. En een middellijn is de langste koorde van een cirkel.



452. $\sin 17x = \cos 17(\frac{\pi}{2} - x) = f(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = f(\sin x)$.

Boekbesprekingen

Systemica, tijdschrift van de Systeemgroep Nederland, nummer 1, februari 1981, jaargang 1, uitg. Academic Service, Den Haag.

Voor ons ligt het eerste nummer van een nieuw tijdschrift, gewijd aan de behartiging van de beroepsmatige belangen en de verspreiding van ideeën en resultaten van onderzoek op het gebied van de systeemtheorie en haar toepassingen. Zoals bekend, heeft de systeemtheorie zich in de afgelopen jaren ontwikkeld tot een wiskundige discipline. Het tijdschrift zal zich echter voornamelijk gaan bezighouden met de praktische toepassingen in de regeltechniek, de operations research waarin optimaliseringsvraagstukken aan de orde komen op het gebied van organisaties, de econometrie. Zo komen in deze aflevering de volgende artikelen voor:

- *Het vermaledijde koppelen*, prof. dr. A. C. J. de Leeuw, (problemen in het sociale, politieke en economische leven, met speculaties over oorzaken en oplossingen)
- *De computer op school: hulp bij het onderwijs in talen*, dr. M. Boot
- *Op lagere school-niveau: 'De Computing Teacher' debuteert*, drs. H. Koppelaar
- *Macht en beleid: twee visies op de overheid*, dr. H. J. Aquina
- *Curieuze systemen*, dr. ir. G. Broekstra
- *Het dilemma van autonoom en beheersbaar ondernemerschap*, dr. ir. G. Broekstra
- *Bedrijfskunde versus bestuurskunde? Vermeende verschillen en controversen*, dr. W. J. M. Kickert

Bovendien nog een aantal aankondigingen van cursussen e.d. De artikelen zijn geschreven in voor ieder toegankelijke taal d.w.z. geen wiskundige benadering van de problematieken. Systemica is dan ook bestemd voor een breder publiek dan alleen systeemtheoretici.
Het doel formuleert de redactie:
'Enerzijds wil Systemica deze systeembenadering verbreiden; anderzijds geeft zij daarmee aan de onderzoekers (voor een breder publiek dan waarvoor zij normaal functioneren) de gelegenheid om hun werk en ideeën zonder detailcultuur uiteen te zetten. Kortom, Systemica kan daardoor een steun vormen bij beleidsvoorbereidend onderzoek.'
Het tijdschrift zal zes maal per jaar verschijnen.
Abonnementsprijs *f* 41,60.

W. Kleijne

M. S. Livshits and A. A. Yantsevich, *Operator Colligations in Hilbert Spaces* (uit het Russisch vertaald), John Wiley and Sons, New York, 1979, XIII + 212 blz., £ 12,50.

Dit boek is een vertaling van een 1971 gepubliceerd Russisch boek. Het woord 'colligation' (in het Russisch staat er 'teorija operatornyh uzlov') betekent 'verbinding'. In dit verband wordt ermee bedoeld dat als H en E Hilbertruimten zijn en Φ is een continue lineaire operator die H afbeeldt in E, dan zijn via deze Φ de operatoren in H met die in E verbonden. Hiervan kan met vrucht gebruik gemaakt worden bij het onderzoek van de eigenschappen van bepaalde niet-Hermitesche operatoren (d.w.z. niet-symmetrische operatoren in het reële geval). Eén der auteurs van dit boek, M. S. Livshits, behoort tot de grondleggers van de theorie; een aantal van zijn resultaten worden dan ook behandeld. Het verband met het werk van B. Sz. -Nagy en C. Foias over de spectraaltheorie van bepaalde typen van operatoren wordt belicht. Toepassingen op stochastische processen worden besproken.
Het boek is bestemd voor specialisten; het vraagt (dus) van de lezer een reeds aanwezige tamelijk grondige kennis van de operatorentheorie in Hilbertruimten.

A. C. Zaanen

G. Meinardus, *Approximation in Theorie und Praxis.*

Het klassieke gebied van de approximatietheorie heeft met de komst van de computer veel toepassingen gevonden, en ook in de theorie zijn er nog steeds interessante nieuwe resultaten. Deze feiten

worden geïllustreerd door het te bespreken boek, de proceedings van een begin 1979 te Siegen (West-Duitsland) gehouden symposium met de referaten van 11 sprekers uit Duitsland en 4 uit USA.

prof. dr. W. W. E. Wetterling

Herbert Meschkowski, *Problemgeschichte der Mathematik I*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1979, 206 blz., DM 32,–.

Eerder verschenen van deze schrijver 'Problemgeschichte der neueren Mathematik (1800-1950)'. Later werd het plan opgevat om ook de ontwikkeling van de wiskunde tot 1800 op analoge wijze te beschrijven. Zo zal er een driedelige uitgave verschijnen waarvan het onderhavige werk het eerste deel is, het zoëvengenoemde het derde deel, terwijl het tweede nu in voorbereiding is.
Het eerste deel behandelt in hoofdzaak de tijd van de aanvang der wiskunde tot en met de late middeleeuwen op een wijze die fundamenteel verschilt met de behandelingswijzen van vele andere werken op het gebied van de geschiedenis der wiskunde. In de inleiding 'Wozu Geschichte der Mathematik' gaat de schrijver uitvoerig in op de waarde van kennis van de geschiedenis der wiskunde voor de wiskundige. De vragen waarom wij ons heden ten dage druk maken, begrippen die wij momenteel hanteren, berekeningswijzen waarmee wij vertrouwd zijn, zij zijn niet uit het niets gekomen, ze hebben een historie, ze ... müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens ... gewesen sein ...'.
Hölder plaatst zich hierbij op het standpunt het niet zo belangrijk te vinden iets te weten over de geschiedenis van een onderwerp; het gaat hem om het ontstaan van problemen, bewijzen en om beslissende keerpunten in dat alles.
Meschkowski stelt zich in dit boek tot doel een probleem-geschiedenis te schrijven. Hij tracht een 'Genesis der Problemstellungen' voor de moderne wiskundige te schrijven speciaal voor docenten. Daartoe beschrijft hij getallenmystiek bij Chinezen en Pythagoreeërs, rekenmethoden in Egypte en Babylonië, begin van de meetkunde, wiskunde in het Oude Griekenland, het axiomatische denken bij Aristoteles en Euclides, de behandeling van irrationaliteit door de Grieken, het mathematische denken van Aristoteles, de relatie wiskunde en sterrenkunde met het begin van trigonometrie en projectieve meetkunde, de ontwikkelingen ten aanzien van de definities van getal en de representatie van getallen door symbolen, de vroege geschiedenis der vergelijkingen tot en met de verwikkelingen rond Tartaglia, Cardano en Ferro, probleemstellingen in de meetkunde w.o. het parallellenprobleem, om tenslotte een hoofdstuk te wijden aan de filosofie der wiskunde in de late middeleeuwen.
Het boekje is in een zeer prettige stijl geschreven, en op functionele wijze verlucht met diverse originele figuren. Oude schrijvers worden, met bronvermelding, geciteerd. Een literatuurlijst en een namenregister sluiten het werk af.
Al met al een boek dat volledig voldoet aan het door de schrijver gestelde doel. Naar mijn mening zullen zeer vele collegae dit boek met evenveel genoegen lezen als ondergetekende. Docenten kunnen uit dit boek veel halen dat zij in hun lessen kunnen verwerken. Ik wens dit boek dan ook een plaats toe in ieders bibliotheek.

W. Kleijne

Mededelingen

Zevende gemeenschappelijke studiedag NVvW en VVWL

Deze zal plaats hebben op *zaterdag 20 maart* in hotel Central/De Leeuwenborgh, Markt 51-57 te 's-Hertogenbosch.
Thema: *Tendensen in het wiskunde-onderwijs* in Vlaanderen en in Nederland.
In Vlaanderen kent men twee programma's voor het wiskunde-onderwijs, één programma voor het Rijksonderwijs en één voor het Vrij Onderwijs (wat wij noemen het bijzonder onderwijs). Vandaar dat de problemen in Vlaanderen belicht zullen worden door twee sprekers, t.w. René Laumen resp. Chris De Munter. Voor Nederland zal Martin Kindt spreken.
Informatie zal worden gegeven over het wiskunde-onderwijs in Vlaanderen en in Nederland zoals dat op dit ogenblik is, en over ontwikkelingen die er gaande zijn. Interessant is vooral kennis ervan te nemen wat er in het buurland gaande is. Echter ook bezinning op de problemen uit het eigen land kan de moeite waard zijn. Verder hopen we op een vruchtbare gedachtenwisseling.
Het programma luidt:
10.00 ontvangst van de gasten
10.30 opening
lezingen door René Laumen, Rijksinspecteur en Dr. Chris De Munter, docent Economische Hogeschool Sint-Aloysius, Brussel
13.00 lunch
14.30 lezing door Martin Kindt, medewerker OW & OC, speciaal voor de HEWET
16.30 sluiting
De lunch zal bestaan uit een Originele Brabantse Koffietafel. Als *tegemoetkoming in de kosten* wordt degenen die aan de lunch wensen deel te nemen, verzocht uiterlijk 5 maart *f* 15,– te storten op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding van 'lunch 20 maart'.
De Markt is gelegen in het centrum van de binnenstad.
Treinreizigers: de Markt is 10 minuten lopen van het station. Kies de richting die loodrecht staat op de voorgevel van het station.
Automobilisten: aangeraden wordt de auto buiten het centrum te parkeren. Er is een parkeergarage in het centrum, maar wie de weg niet kent, raakt door het eenrichtingsverkeer beslist de draad kwijt.
Graag tot slot een opwekking aan de Nederlanders door hun aanwezigheid bij te dragen aan het slagen van dit interland-contact.

Het bestuur

Jaarvergadering VVWL

De jaarvergadering van de VVWL vindt plaats op *zaterdag 6 maart 1982* in de Rijksmiddenschool te Mechelen (adres: Zandpoortvest).
Thema: *Redeneren en Bewijzen.*
9.30 ontvangst
10.00 opening door de voorzitter Frank Laforce
lezingen door Inspecteur Romain Pelsmaeckers: Tekenen we zomaar pijlen? en Prof. Dr. Dirk van Dalen (RU Utrecht): Bewijzen - klein beginnen.
12.30 warme lunch
14.30 forumgesprek over: Moet alles bewezen worden?
16.00 statutaire vergadering
Nederlanders zijn van harte welkom.
Wie aan de lunch wenst deel te nemen wordt verzocht voor 20 februari 255 BF te storten op giro 000-1116247-68 t.n.v. VVWL, Wilrijk, onder vermelding 'lunch 6 maart'.
Treinreizigers: de Rijksmiddenschool ligt nabij het station Mechelen-Neckerspoel, tussen dit station en dat van Mechelen.

Automobilisten: E10 volgen tot afrit Mechelen-Noord, richting Mechelen kiezen. Bij de verkeerslichten rechtdoor rijden langs de vaart tot men de spoorwegberm ziet. Rechts is daar de Zandpoortvest met ruime parkeergelegenheid.

PYTHAGORAS - en hoe verder?

We gaan er van uit dat u, als wiskundeleraar avo/vwo, 'Pythagoras' kent: het kleine krantje dat af en toe op school arriveert en dat u dan aan enkele enthousiastelingen doorgeeft.
De redactie wil er u een aantal vragen over voorleggen. Ook al is het blad nu bijna meerderjarig, het is niet zo dat het jaar in jaar uit zo maar vanzelf uit de persen rolt. En het is evenmin zo, dat inhoud/vorm/niveau/stijl etc. per definitie altijd zo moeten blijven als die in het verleden geweest zijn. Pythagoras wil een blad zijn dat uw wiskunde-onderwijs ondersteunt, aanvult, aantrekkelijker maakt, ... Maar in hoeverre lukt ons dat eigenlijk? En, minstens zo belangrijk, op welke manier zou dit anders en beter kunnen? Hieronder zijn deze algemene vragen nog wat gedetailleerder gesteld. We hopen dat u er even over wilt nadenken, en dat een aantal van u haar/zijn ideeën hierover op papier zet en aan ons opstuurt.

- Wat zou ú in Pythagoras willen zien staan? Zo, dat (veel) meer van uw leerlingen dan nu er wat aan heeft – er wat áán vindt. Lijkt het wel mógelijk om voor een erg brede groep, zeg van 3-mavo tot 6-vwo, aantrekkelijk te zijn? Of lijkt het wijzer om de doelgroep beperkter te houden?
- Kunt u in de afgelopen jaargangen artikelen aanwijzen waarvan u zegt: Graag méér van dat soort?
- In welke vorm zou u Pythagoras geschikt vinden als klassikaal aan te schaffen leermiddel? Dit komt nu slechts hier en daar voor, b.v. in wiskunde-II groepen. Met het zusterblad 'Archimedes' (natuur- en scheikunde) gebeurt dit veel vaker. Waarom? En willen we dat?
- Het zal toch nièt waar zijn dat u vindt dat er aan Pythagoras zoals het nu is, niets meer te verbeteren valt?!

Als u wilt reageren – graag. Aan het redactie-secretariaat, p.a. Tournoysveld 67, 3443 ER Woerden.

Redactie 'Pythagoras'

Meisjes en wiskunde

De volgende landelijke bijeenkomst is *zaterdag 27 maart 1982.*
Voor informatie: Jophien van Vaalen, Korte Prinsengracht 109, Amsterdam, tel. 020-25 08 71.
Marja Meeder, St. Willibrordusstraat 35, Amsterdam, tel. 020-72 25 09.

Het Achttiende Nederlandse Mathematische Congres

Het congres wordt gehouden op *woensdag 7 en donderdag 8 april 1982* in de Landbouwhogeschool, gebouw voor wiskunde, De Dreijen 8 te Wageningen.
Voor informatie en inschrijving: Dr. B. van Putten, tel. 08370-8 35 61 (8 43 85).

Eindexamenbesprekingen

Deze zullen plaatsvinden van *11 t/m 14 mei 1982.* Nadere mededelingen volgen.

Het bestuur

INHOUD

H. Boertien: Leerdoelgericht werken in het onderwijs 253

H. Rabaey: Groepswerk in de wiskunde 263

B. Muller en B. Zwaneveld: Leerlingen kiezen te graag wiskunde (interview) 269

J. O. de Kat: Eenheidscirkel in het complexe vlak 272

H. Zunneberg: De stelling van Georg Alexandrof Pick 277

A. van Oort: Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het HAVO-onderwijs II 281

L. A. Rang: Korrel 285

Recreatie 286

Boekbesprekingen 289

Mededelingen 291

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Boertien, Cito, postbus 1034, 6801 MG Arnhem

J. O. de Kat, Kraaienlaan 3, 2566 RA Den Haag

B. Muller, van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht

H. Rabaey, R. Vandammestraat 178, 8460 Koksijde, België

L. A. Rang, Berkenweg 7, 3941 JA Doorn

A. van Oort, Kath. Ped. Acad., St. Josephstraat 22, 5211 NJ Den Bosch

H. Zunneberg, Geert Groote College, Herman Boerhaavelaan 1, 7415 ES Deventer

B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam